

УДК 534.1 : 539.3

С.В.УГРИМОВ, канд. техн. наук

Институт проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України, м.Харків

ОДНОБІЧНИЙ КОНТАКТ БАГАТОШАРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ

Розглядаються питання математичного моделювання напружено-деформованого стану багатошарових пластин на пружній основі при статичному навантаженні. Поведінка кожного шару описується рівняннями Ляме, для моделювання пружної основи використовується рівняння Вінклера. Контактна задача розв'язується методом колокацій. Наведено результати розрахунку дорожнього покриття.

Аналіз напружено-деформованого стану (НДС) багатошарових конструкцій, що лежать на пружній основі, є важливим завданням механіки, яке має велике практичне значення для цивільного й промислового будівництва. При розрахунку фундаментів, підлог промислових будинків, покриттів автомобільних доріг і аеродромів та в ряді інших задач потрібен аналіз взаємодії пружної багатошарової конструкції й основи [1-3].

Вірогідність теоретичної оцінки НДС багатошарових конструкцій, що лежать на пружній основі, значною мірою визначається ефективністю моделювання багатошарової конструкції й пружної основи. Таким чином, виникає проблема обґрунтованого вибору моделей середовищ і їх адекватності реальним властивостям системи "плита – пружна основа" [1-7].

Дана стаття продовжує дослідження, розпочаті в роботах [4-6]. Тут запропоновано аналітико-чисельний метод розв'язання задачі аналізу НДС багатошарових пластин на пружній однібічній основі. Поведінка багатошарової конструкції описується рівняннями лінійної теорії пружності [4]. Пружна основа моделюється рівнянням Вінклера [7]. Врахування однібічної дії пружної основи здійснюються за методом колокацій [6, 9]. Можливості методу демонструються на прикладі розрахунку на силовий вплив від транспортного засобу багатошарового дорожнього покриття нежорсткого типу [5, 8].

Багатошарова конструкція складається з I шарів постійної товщини (h_i – товщина i -го шару), виготовлених з однорідного ізотропного матеріалу. Механічні характеристики i -го шару: E^i , ν^i – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона. Контакт між шарами виключає їхнє розшаровування і взаємне проковзування. Зв'язок багатошарової конструкції з основою є однібічним, основа чинить опір вдавненню й не чинить опору відходу конструкції.

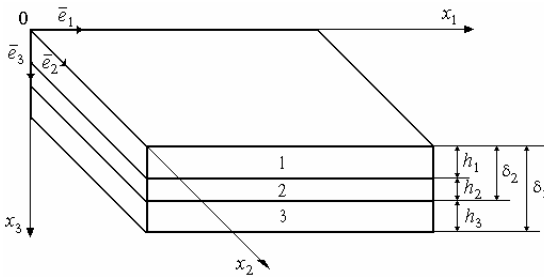


Рис. 1 – Багатошарова пластина

Багатошарова пластина віднесена до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ (рис.1). До зовнішньої поверхні першого шару прикладено розподілене навантаження $q_3^1 = q_3^1(x_1, x_2)$, а до зовнішньої поверхні

I -го шару – $q_3^I = q_3^I(x_1, x_2)$, що є реакцією пружної основи.

Поведінка пластины описується рівняннями Ляме [4]

$$\mu^i (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u}^i + (\lambda^i + \mu^i) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}^i) = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq x_1 \leq A, \quad 0 \leq x_2 \leq B, \quad \delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad i = \overline{1, I},$$

де μ^i, λ^i – коефіцієнти Ляме для i -го шару, $\bar{u}^i = \bar{u}^i(x_1, x_2, x_3)$ – вектор переміщень точки i -го шару, A, B – лінійні розміри пластины.

Крайова задача в цьому випадку формулюється наступним чином. Необхідно знайти такий розв'язок $\bar{u}^i (i = \overline{1, I})$ системи (1), що задовольняє умовам на зовнішніх поверхнях 1-го і I -го шарів

$$\begin{aligned} p_{31}^1 = p_{32}^1 = 0, \quad p_{33}^1 = -q_3^1 \quad \text{при} \quad x_3 = 0; \\ p_{31}^I = p_{32}^I = 0, \quad p_{33}^I = -q_3^I \quad \text{при} \quad x_3 = \delta_I, \end{aligned} \quad (2)$$

умовам контакту сусідніх шарів

$$u_k^i = u_k^{i+1}, \quad p_{3k}^i = p_{3k}^{i+1} \quad \text{при} \quad x_3 = \delta_i, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad (3)$$

умовам на контурі опирання

$$\begin{aligned} p_{11}^i = u_2^i = u_3^i = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, A; \\ p_{22}^i = u_1^i = u_3^i = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, B, \quad i = \overline{1, I}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $u_k^i = u_k^i(x_1, x_2, x_3)$ – проекція вектора переміщень на вісь Ox_k ; p_{jk}^i – компоненти тензора напружень, що обчислюються за законом Гука.

Коефіцієнти Ляме пов'язані з модулем Юнга E^i і коефіцієнтом Пуассона ν^i залежностями $\lambda^i = \nu^i E^i / ((1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i))$, $\mu^i = E^i / (2(1 + \nu^i))$.

Розв'язок задачі (1)-(4) здійснюється аналогічно методу, викладеному в роботі [4]. Переміщення і зовнішнє навантаження розвиваються в подвійні ряди по системі ортогональних функцій, що задовольняють умовам на контурі опирання, а похідні по поперечній координаті замінюються їх скінченно-різницеvim представленням. У результаті задача зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для описання пружної основи використовується модель Вінклера, згідно якої основа складається з лінійних пружин, що деформуються незалежно одне від одного [7]:

$$kw(x, y, t) - q_3^w(x, t) = 0,$$

де k – коефіцієнт [4, 7], w – прогин основи, $q_3^w(x_1, x_2)$ – навантаження, що діє на основу.

Контактна задача. Припускається наявність ідеального однобічного зв'язку між багатошаровою конструкцією та основою. Область контакту заздалегідь невідома. В зоні контакту виконується умова $q_3^I = -q_3^w = F(x_1, x_2)$, де $F(x_1, x_2)$ – невідомий контактний тиск. Невідомий контактний тиск і зона контакту визначаються з умови непроникнення

$$u_3^I(x_1, x_2, h^N) - w(x_1, x_2) \leq 0.$$

У зоні контакту ця нерівність перетворюється на рівність.

Для визначення зони контакту і контактних тисків використовується метод колокацій, який докладно викладено у роботах [6, 9].

Проведено чисельні дослідження НДС фрагменту дорожнього одягу, який має розміри у плані 500×1000 см, під дією навантаження, що моделює вплив пари коліс транспортного засобу [5, 8]. Товщини шарів та їх механічні властивості наведено в таблиці.

Дорожній одяг

№ шару	Матеріал шару	Товщина, см	Модуль Юнга, Е, кПа	Коефіцієнт Пуассона ν
1	Асфальтобетон покриття	5	3 200 000	0,3
2	Асфальтобетон основи	8	2 000 000	0,3
3	Щебінь	30	350 000	0,35
4	Пісок середньої величини	50	100 000	0,35
5	Грунт земляної полотнини	∞	33 000	0,35

Навантаження має вигляд:

$$q_3^I = p \cdot (H(x - x_1) - H(x - x_1 - a)) \cdot (H(y - y_1) - H(y - y_1 - b)) + \\ + p \cdot (H(x - x_2) - H(x - x_2 - a)) \cdot (H(y - y_2) - H(y - y_2 - b)),$$

де p – інтенсивність ($p = 700$ кПа), $H(x)$ – функція Хевісайда, a, b – параметри, що характеризують розмір площі контакту колеса з покриттям ($a = 19,6$ см, $b = 29,8$ см). Припускається, що навантаження розташовано у центрі багатошарового покриття, тобто $x_1 = 223,6$ см, $y_1 = 485,6$ см, $x_2 = 256,6$ см, $y_2 = 485,6$ см.

Результати розрахунку за запропонованим методом порівнюються з даними, наведеними в роботі [5], де для описання поведінки багатошарового одягу використовується уточнена двовимірна теорія (теорія ламаної нормалі), що базується на гіпотезах типу Тимошенка.

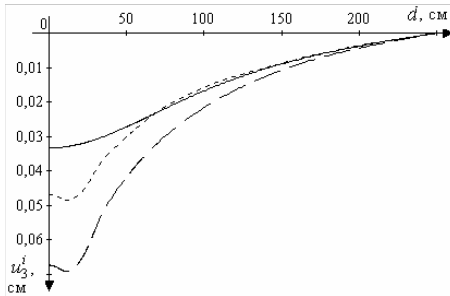


Рис.3 – Вертикальні переміщення вздовж координати x_1

На рис.2 показано вертикальні переміщення у покритті вздовж координати x_1 при віддаленні від центру покриття. Тут по осі абсцис відкладається відстань від центру вантаження (d , см), а по осі ординат – вертикальні переміщення (u_3^i , см). Результати розрахунку переміщень посередині зовнішніх

поверхонь першого та четвертого шарів за запропонованим методом представлено пунктирною та суцільною лініями відповідно. Дані, наведені у роботі [5], представлені точками. З рис.2 видно, що найбільше переміщення дорожній одяг зазнає під колесом. Слід зазначити, що деяке розходження результатів розрахунку на базі тривимірної теорії та уточненої двовимірної теорії пояснюється неврахуванням у останній поперечного обтиснення.

На рис.3 представлено характерну зміну напружень p_{11}^i по товщині в точці $x_1 = 250$ см, $x_2 = 500$ см. Суцільною лінією зображено результати розрахунку за запропонованим методом, точками – дані, отримані на базі уточненої теорії. Як видно з рис. 3, характер залежності напружень по товщині першого шару має суттєво нелінійний характер, який погано апроксимується уточненою теорією, що виходить з

лінійної залежності площинних переміщень по товщині пакету.

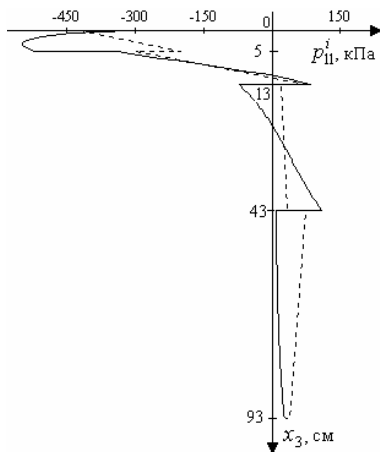


Рис.3 – Розподіл напружень за товщиною

Таким чином, у роботі сформульовано і розв'язано статичну задачу про однібічний контакт багат шарових конструкцій з пружною основою. Попередній аналіз показав, що запропонований метод дозволяє ефективно розв'язувати задачі визначення напружень і деформацій у шарах багат шарових пластин на пружній основі при статичному навантаженні. Метод може бути успішно узагальнений на випадок нестационарного навантаження.

1. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
2. Пастернак П.Л. Основы метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
3. Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П. Практические методы расчета фундаментальных балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1962. – 357 с.
4. Шупиков А.Н., Бузько Я.П., Сметанкина Н.В., Угримов С.В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков: ИД «ИНЖЭК», 2004. – 252 с.
5. Розрахунок на міцність багат шарового дорожнього покриття нежорсткого типу на основі уточненої теорії / Н.В. Долгополова, Н.В. Сметанкіна, С.В. Угрімов, О.М. Шупіков, С.В. Долгополов, В.А. Голендер // Науковий вісник будівництва. Вип. 39. – Харків: ХДТУБА, 2006. – С. 177-183.
6. Угримов С.В., Шупиков А.Н., Бузько Я.П. Односторонний контакт многослойной полосы и упругого основания при импульсном нагружении // Науковий вісник будівництва. Вип. 34. – Харків: ХТУБА, 2005. – С. 285-291.
7. Kerr A.D. Elastic and viscoelastic foundation models // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1964. – Vol. 31. – №3. – P. 139-148.
8. Hadi Muhammad N.S. Non-linear finite element analysis of flexible pavements/ Muhammad N.S. Hadi, B.C. Bodhinayake // Advances in engineering software. – 2003 – Vol. 34. – P. 657-662.
9. Угрімов С.В., Шупіков О.М. Динамічна контактна задача для двох смуг // Машинознавство. – 2003. – №4 (70). – С. 13-17.

Отримано 02.10.2007